Rozšíření MA1 – domácí úkol 1 – „dodatek"

2. a) Definujte pojem base vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané basi .
   b) Ukažte dle definice, že vektory
   $$\vec{b}_1 = (1,-1,0),\ \vec{b}_2 = (1,\,-1,\,-1),\ \vec{b}_3 = (0,\,1,\,-2)$$
   tvoří basi prostoru R^3 .
   c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1,-1,1)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.
   d) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

„Současně" můžeme řešit c) i d):

„je-li dána báze $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ prostoru R^3, a máme-li najít souřadnice vektoru $\vec{x} \in R^3$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$, znamená to, najít (α, β, γ) tak, aby

$$\vec{x} = \alpha \vec{b_1} + \beta \vec{b_2} + \gamma \vec{b_3},$$

tj. (vektory píšeme jako „sloupcové"), aby

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

(α, β, γ) je tedy řešením soustavy rovnic

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta \qquad &= x_1 \\ -\alpha - \beta + \gamma &= x_2 \\ -\beta - 2\gamma &= x_3 \end{aligned}\right\} (*) .$$

Soustavu rovnic (*) můžeme řešit třeba

a) Gaussovou eliminační metodou (zde lze snadno i „Gauss-Jordanem");

nebo

b) užitím inversní matice k matici soustavy, která je regulární, neboť sloupce matice soustavy (*) jsou vektory $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ dané báze;

a) <u>Gaussova (Gauss-Jordanova) eliminace</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ -1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & -2 & x_3 \end{array}\right) \overset{1.ř.+2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -2 & x_3 \end{array}\right) \sim \quad \begin{array}{l} 3ř. + 2\times 2.ř., \\ \text{a pak „výměna"} \\ 2.ř. \Leftrightarrow 3ř. \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2x_1+2x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 1.ř.+2.ř. \\ \text{a pak} \\ (-1)\times 2.ř. \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x_1+2x_2+x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -2x_1-2x_2-x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_2 \end{array}\right)$$

Tedy, řešení je (píšeme do „sloupce")

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1+2x_2+x_3 \\ -2x_1-2x_2-x_3 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) <u>Užitím inverzní matice k matici soustavy:</u>

soustavu (*) lze zapsat i následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ pak } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

tedy, vidíme, že (z a))

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

<u>Zkouška „správnosti"</u> : $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$ (jednotková matice)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a skusme ještě ukázat si „výpočet" inverzní matice k matici soustavy (*) (Gauss-Jordan) (úpravy jako v a))

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ tj.}$$

opět „máme"
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v „nové" bázi (tj. c))

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$